

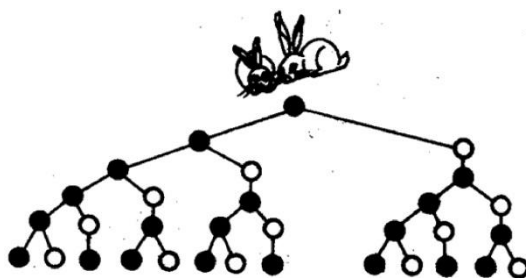
10 蠱斯的繁衍…用樹狀圖來畫族譜

許多參觀過故宮博物院的人一定忘不了那件名聞遐邇的玉雕「翠玉白菜」，菜葉上那兩隻栩栩如生的翠綠色小蟲子，正是蠱斯與蝗蟲：



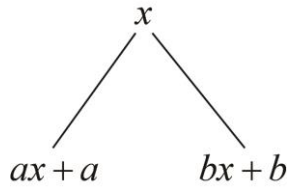
蠱斯的繁殖能力特別強，紫禁城西側有個蠱斯門，意在祈盼皇室多子多孫。在這一節裡，我們將介紹一種蠱斯繁殖的數學模式。

動物的繁殖圖有如人類的族譜一樣，類似樹枝狀的分佈。將繁殖問題以數學模型來呈現最有名的例子就是一道關於兔子的繁殖問題，那是中古歐洲時，費波納契在《計算書》上所提出的問題：假設任何一對新出生的兔子，兩個月後開始生一對新兔，以後每隔一個月都生一對新兔。若年初有一對新兔，則在不發生死亡的情況下，年底總共有幾對兔子？我們是透過樹狀圖來考慮每個月兔子總對數，進而得到有名的費氏數列¹：

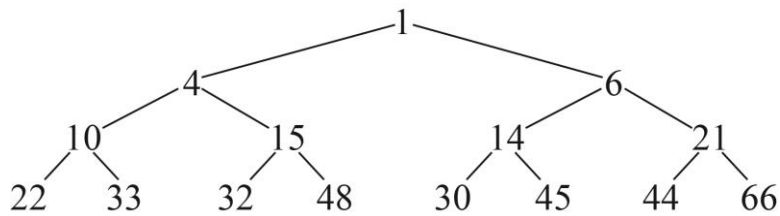


¹費氏數列是指滿足 $f_1 = f_2 = 1$ 且 $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n (n \geq 1)$ 的數列 $\langle f_n \rangle$ 。

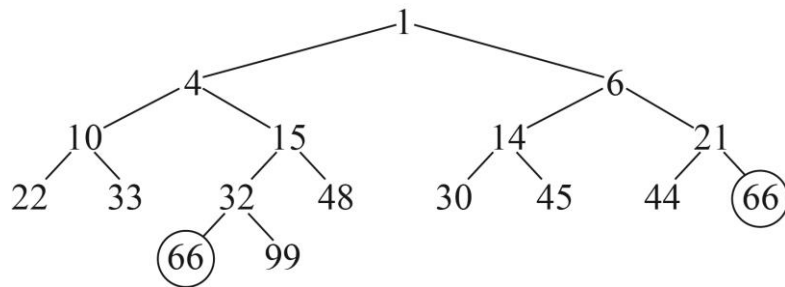
蠱斯的繁殖比兔子的繁殖複雜許多，例如：第一代的 x 隻蠱斯會繁衍出左、右兩支第二代蠱斯，而且當左、右兩支的蠱斯個數分別為 $ax + a$ 與 $bx + b$ 隻時，稱此繁殖為 (a, b) 型態繁殖，如下圖所示：



螽斯的每一代的每一分枝都會根據上述模型繼續繁衍出左右兩枝的下一代，所以螽斯的繁殖也會很像樹狀圖一樣。舉例來說，繁殖型態為 $(a,b)=(2,3)$ 的螽斯會從第一代的 1 隻，在經過四代的繁衍後，形成如下的繁殖樹狀圖：



很明顯地，前四代的這些繁殖數字都不重複，但是第四代的 32 那支會繁殖出左 66 與右 99 的第五代，第五代的 66 分支與第四代的最後一支的數字一樣，也就是說，在 $(2,3)$ 型態的繁殖中，五代內就會出現重複的分支數字，如下圖所示：



透過計算，回答以下兩個問題：

- (1) 繁殖型態為 $(1,3)$ 的螽斯，在第幾代內會出現重複的分支數字。
 - (2) 繁殖型態為 $(3,4)$ 的螽斯，在第幾代內會出現重複的分支數字。
-

出現重複的分支數字代表：從該數字以下所繁衍出來的分支圖形會完全一樣，即重複數字的繁衍樹狀圖是相對簡單的樹狀圖，有點像會循環的小數一樣（此類小數都可以用分

數來表示)。英國數學家麥克·克拉克 (Michael Clarke) 計算了一些型態的蠡斯繁衍樹狀圖，得到下表，其中表內的數字代表在幾代內會出現重複的分支數字，而打「？」者代表該型態尚未找到重複的分支數字：

$b \setminus a$	1	2	3	4	5	6	7
1	2	4	5	6	7	8	9
2	4	2	5	?	3	?	?
3	5	5	2	7	?	?	?
4	6	?	7	2	?	?	?
5	7	3	?	?	2	?	?
6	8	?	?	?	?	2	?
7	9	?	?	?	?	?	2

「兔子的繁殖問題」讓人類發現費氏數列，而此數列也在自然界的很多故事上發生；而「蠡斯的繁殖樹狀圖」至今仍有許多未解的謎題。例如，上圖中的每一個問號，到底是會有重複數字或者沒有重複數字呢？只要能夠解決一個問號，都會是不錯的進展。

參考文獻

- [1] 蔡承志，楊台勇譯 (柯利弗德·皮寇弗著)，《數字的異想世界：125 個有趣的數學遊戲》，商周出版。